Elementy sztucznej inteligencji

Data ostaniej modyfikacji: **25 stycznia 2005**

Piotr Fulmański

Piotr Fulmański

Wydział Matematyki, Uniwersytet Łódzki
Banacha 22, 90-232, Łódź
Polska
email:fulmanp@imul.math.uni.lodz.pl

Zanim zaczniemy ...

Powyższe opracowanie to nic innego jak moje notatki tworzone w trakcie przygotowywania zajęć z „Elementów sztucznej inteligencji”. Obecnie jest to bardziej plan zajęć (i jednocześnie spis zagadnień na egzamin ;)) niż materiał z którego można się uczyć.

Spis treści

Rozdział 1

Sztuczna inteligencja

1.1 Zarys materiału

Niniejszy wykład ma charakter wybitnie interdyscyplinarny. Obejmuje bowiem swoim zasięgiem tematy i problemy ogólnie znane pod nazwą Sztucznej Inteligencji. Jak się dosyć szybko przekonamy, dziedzina ta ma swoje powiązania z logika, informatyką, matematyką, psychologią, filozofią, biologią, lingwistką, robotyką.

Ze względu na tak szeroki zakres poruszanych tematów znaczną trudność przedstawia takie przedstawienie wiadomości aby ułożyły się one w jakąś sensowną całość.

Całość zagadnień podzielona została na dwie grupy, które wzajemnie będą się przenikać w toku zajęć.

- Grupę pierwszą stanowić będą praktyczne przykłady zaczerpnięte z niektórych dziedzin wchodzących w skład Sztucznej Inteligencji wraz z omówieniem podstawowych zagadnień (sieci neuronowe, programy ewolucyjne, logika rozmyta, modelowanie zachowań). Wykład odpowiedzialny będzie w tym przypadku za wprowadzenie pojęć i ich teoretyczną prezentację; implementacje pozostawione zostaną na ćwiczenia.
- Drugą natomiast teoria czyli w tym przypadku:
  - jak doszło do powstania dziedziny nauki nazywanej dziś Sztuczną Inteligencją – prezentacja badań, prac i osiągnięć związanych z konstruowaniem myślących maszyn;
  - rozważania natury filozoficznej związane z, ogólnie mówiąc, myśleniem.

Wydaje mi się, iż istotnym jest aby podczas całego cyklu zajęć poszukiwać odpowiedzi na pewne pytania. Wątpię abym odpowiedzi te zamieścił w sposób jawny, dlatego, że każdy sam musi wyrobić sobie swoje własne zdanie i mieć intuicję związaną z tym tematem. Oto te pytania:

1. Czy maszyna może myśleć?
2. Jaka możliwa maszyna może myśleć?
3. Czy myśląca maszyna będzie równoznaczna ze sztucznym człowiekiem?
4. Dlaczego budujemy maszyny myślące?
5. Czy maszyna myśląca będzie posiadać prawa istoty myślącej?
6. Czy maszyna myśląca zaliczana będzie do „bytów” żywych?

Oczywiście pytań podobnych do tych jest wiele. Każdy może uzupełnić tę listę o własne i poszukiwać odpowiedzi.

1.2 Sztuczna Inteligencja - czym jest?

Spróbujmy teraz określić czym jest Sztuczna Inteligencja. Nie należy tego co napiszę zaraz poniżej traktować jako SCISŁEJ definicji jako, że jest ich wiele. Jest to pewna propozycja, tak samo dobra jak wiele innych :)))

Definicja 1.2.1 *Sztuczna Inteligencja jest dziedziną wiedzy której celem i przedmiotem badań są maszyny potrafiące rozwiązywać zadania, przy rozwiązywaniu których człowiek korzysta ze swojej inteligencji.*

Sami badacze Sztucznaj Inteligencji dzielą się na dwa obozy, wedle propozycji i charakterystyki Johna Searle'a:

Silna Sztuczna Inteligencja (*ang. Strong Artificial Inteligence*) Zwolennicy tego obozu uważają, iż zbiór problemów stawianych przed nauką (jako taką, Sztuczną Inteligencją w szczególności) i rozwiązywalnych metodami naukowymi pokrywa się z klasą problemów rozstrzygalnych algorytmicznie, czyli rozwiązywalnych przez urządzenia pracujące na zasadzie maszyny Turinga. Mówiąc bardziej obrazowo, dla każdego zachowania lub akcji jaka wydaży się w naszym otoczeniu można napisać program, który to zachowanie lub akcję wyjaśni. Stąd często określa się ich mianem algorytmistów.

Słaba Sztuczna Inteligencja (*ang. Weak Artificial Inteligence*) Zwolennicy tego poglądu są zdania, iż możliwe jest pełne poznanie badanych zagadnień, ale poznanie to nie będzie opierało się na procedurach algorytmicznych.

Z kolei Roger Penrose proponuje podział oparty o następujące stanowiska

1. Myślenie zawsze polega na obliczeniach, a w szczególności świadome doznania postają wskutek realizacji odpowiedniego procesu obliczeniowego (stanowisko to pokrywa się z SAI).

2. Świadomość jest cechą fizyczną działającego mózgu. O ile szystkie fizyczne procesy można symulować obliczeniowo, to jednak symulacjom tym nie towarzyszy świadomość.

3. Odpowiedni procesy fizyczne w mózgu powodują powstanie świadomości, ale tych procesów nie można nawet symulować obliczeniowo (stanowisko to pokrywa się z WAI).

4. Świadomości nie można wyjaśnić w żaden fizyczny, obliczeniowy czy inny naukowy sposób (mistycyzm).

W calym wykładzie będzimy trzymać się następującej notacji: przez **Sztuczną Inteligencję** określać będziemy dziedzinę badań zaś prze **sztuczną inteligencję** przedmiot badań.

Zauważmy, że jeśli Sztuczna Inteligencja bada myślący sztuczny system poznawczy to czyni to w oparciu o znajomość systemu naturalneg stając się tym samym bliską naukom kognitywnym (*ang. Cognitive Science*).

Nauki kognitywne to określene na interdyscyplinarny zbór nauk związanych ze zdobywaniem i używaniem wiedzy. Swój wkład wnoszą tutaj: psychologia, lingwistyka, filozofia, atropologia, nauki o mózgu, pedagogika, logika, matematyka, informatyka (*computer science*) i zapewne jeszcze wiele innych :))) Istnieje pięć głównych pól badawczych w naukach kognitywnych: reprezentacja wiedzy, język, uczenie się, myślenie, percepcja.

Inna definicja nauk kognitywnych to:

nauki kognitywne są studium inteligencji i systemów inteligentnych ze szczególnym odniesieniem się do zachowania inteligentnego jako procesu dającego się obliczyć.

Mimo bliskości nauk kognitywnych i Sztucznej Inteligencji będziemy je rozgraniczać: nauki kognitywne za przedmiot swych badań obrały naturalne systemy poznawcze ze szczególnym uwzględnieniem roli człowieka, natomiast Sztuczna Inteligencja jedynie takie systemy modeluje.

1.3 Test Turinga

1.3.1 Idea tesu

1.3.2 Sprzeciwy i zarzuty

Sprzeciw teologiczny

Zarzut „lepiej o tym nie myśleć"

Sprzeciw matematyczny

Zarzut świadomości

Zarzut niemożności

Zarzut nieformalności zachowań

Zarzut pozazmysłowej percepcji

1.4 Dwa różne pokoje

1.4.1 Chiński Pokój

1.4.2 Jasny Pokój

Rozdział 2

Sztuczne sieci neuronowe

2.1 Neuron biologiczny i jego sztuczny model

2.2 Model McCullocha i Pittsa

2.3 Model neuronu dla sztucznych sieci neuronowych

2.3.1 Funkcje aktywacji

- „progowa”

$$f(net) = \begin{cases} 1 & net \geq 0 \\ -1 & net < 0 \end{cases}$$

- liniowa

$$f(net) = a \cdot net$$

- sigmoidalna bipolarna

$$f(net) = \frac{2}{1 + exp(-\lambda net)} - 1$$

- sigmoidalna unipolarna

$$f(net) = \frac{1}{1 + exp(-\lambda net)}$$

2.4 Modele sztucznych sieci neuronowych

2.4.1 Sieci jednokierunkowe

Sieci jednowarstwowe

Sieci wielowarstwowe

2.4.2 Sieci ze sprzężeniem zwrotnym

2.5 Przetważanie informacji w sieciach neuronowych

1. Kojarzenie obrazów wejściowych
   - autoasocjacja
   - heteroasocjacja
2. Klasyfikacja i rozpoznawanie

- klasyfikacja
- rozpoznawanie

3. Uczenie i adaptacja
    - uczenie Uczenie z nauczycielem. Uczenie bez nauczyciela.
    - adaptacja

2.6 Możliwości architektur sieci

2.7 Sieci neuronowe - cechy

- stanowią uniwersalny układ aproksymacyjny odwzorowywujący wielowymiarowe zbiory danych;
- mają zdolność równoległego przetwarzania informacji;
- są odporne na uszkodzenia połączeń międzyneuronowych;
- mają zdolność uczenia się i adaptacji do zmiennych warunków środowiska;
- mają zdolność uogólniania nabytej wiedzy, stanowiąc pod tym względem system sztucznej inteligencji

Wykorzystanie w:

- rozpoznawania obrazów;
- robotyka;
- automatyka;
- teoria sterowania i zagadnienia optymalizacyjne;
- dziedziny tzw. sztucznej inteligencji, a zwłaszcza systemy ekspertowe.

2.8 Uczenie sieci

2.8.1 Wsteczna propagacja będu

Rozdział 3

Algorytmy genetyczne

3.1 Wstęp

3.1.1 Idea

3.1.2 Podstawowe terminy

Populacja

Osobnik

Chromosom

Gen

Genotyp

Fenotyp

Allel

Locus

3.2 Klasyczny algorytm genetyczny

3.2.1 Cechy algorytmu genetycznego

3.2.2 Algorytm genetyczny

3.2.3 Przykład

Mamy następujące zadanie: znaleźć maksimum funkcji $f(\cdot)$ określonej następującym wzorem

$$f(x) = 50 - \frac{1}{2}\sin(10\pi x) - 10(x - 1\frac{1}{2})^2$$

dla $x \in [0, 3]$. Wykres funkcji przedstawia rysunek **??**.
Rozwiązanie:

Używając najbardziej naturalnej reprezentacji, chromosomowi $c_1 c_2 \ldots c_N$ o długości N odpowiada liczba o wartości

$$x' = \sum_{i=1}^{N} c_i 2^{-i}$$

Chrom.	Geny chrom.	x	$f(x)$
c_1	001011111010001000	0.558199	37.095265
c_2	100110010101100000	1.797004	48.705701
c_3	001001100101001011	0.449102	22.914265
c_4	001001010000100010	0.433985	22.891859
c_5	011101010010110010	1.373136	53.414501
c_6	000110010000111000	0.293611	19.895602
c_7	001010100110010001	0.496778	29.365759
c_8	101011100110000000	2.043465	39.197929
c_9	011000001010000100	1.132374	51.549879
c_{10}	011000001110101101	1.135773	51.855631
c_{11}	001101010100100101	0.624449	31.194383
c_{12}	100101000000011100	1.734702	53.331889
c_{13}	011010111100111011	1.263375	44.315135
c_{14}	100101011101010000	1.755805	53.608358
c_{15}	000111001110010010	0.338586	27.704348
c_{16}	100100101101110110	1.721084	52.097334
c_{17}	110010110100100100	2.382257	37.077412
c_{18}	000100111010001001	0.230084	13.693426
c_{19}	101000001010111111	1.883052	44.527296
c_{20}	100011110101100111	1.679896	46.400632

Tablica 3.1: Początkowa populacja chromosomów

należąca do przedziału [0,1]. Aby otrzymać liczbę z przedziału $[0, 3]$ należy zatem użyć następującego przekształcenia liniowego

$$x = 3x'$$

W tym przykładzie przyjmujemy $N = 18$. Stąd wniosek, że będziemy mieć 2^{18} punktów, oddalonych od siebie o odcinek o długości $2^{-18}3$. Przyjmijmy ponadto wartość 20 jako liczność populacji, 0.3 jako prawdopodobieństwo krzyżowania i 0.003 jako prawdopodobieństwo mutacji. Prześledzimy teraz kilka pierwszych kroków algorytmu. Zaczynamy od wygenerowania populacji początkowej; wybór ten jest losowy a w jego wyniku otrzymano populację z tabeli 3.1.

Średnia wartość funkcji oceny wynosi 39.041830. Załóżmy teraz, że do reprodukcji wybrano (zgodnie z zasadą ruletki) chromosomy o numerach $5, 10, 5, 9, 12, 16, 5, 19, 12, 19, 5, 20, 6, 9, 19, 1, 17, 9, 7$. Jeśli teraz dokonamy operacji krzyżowania na chromosomach 5 i 10:

```
c5  : 011101010010110010  1.373136  53.414501
c10 : 011000001110101101  1.135773  51.858631
```

a krzyżowanie nastąpi po 13 genie to otrzymamy dwa nowe chromosomy

```
c5_new  : 011101010010101101  1.373079  53.420177
c10_new : 011000001110110010  1.135830  51.860342
```

Jeśli natomista mutacja dokonana została na cgromosomie 1

```
c1 : 001011111010001000  0.558199  37.095265
```

na genie 4 to otrzymamy chromosom

```
c1 : 001111111010001000  0.745700  43.575070
```

W wyniku zastosownia operatorów genetycznych otrzymano ostatecznie nstępującą populację ze średnią wartoscią funkcji oceny wynoszącą 46.613562.

3.3 Algorytm genetyczny - modyfikacje

Chrom.	Geny chrom.	x	$f(x)$
c_1	101000010010110010	1.888763	45.248598
c_2	011000001010000100	1.132374	51.549879
c_3	100101000000011100	1.734702	53.331889
c_4	011101010010110010	1.373136	53.414501
c_5	011000001110101101	1.135773	51.855631
c_6	100100101101110110	1.721084	52.097334
c_7	011101010010110010	1.373136	53.414501
c_8	101000001010111111	1.883052	44.527296
c_9	100101000000011100	1.734702	53.331889
c_{10}	101000001010111111	1.883052	44.527296
c_{11}	011101010010110010	1.373136	53.414501
c_{12}	100011110101100111	1.679896	46.400632
c_{13}	000110010000111000	0.293611	19.895602
c_{14}	011000001010000100	1.132374	51.549879
c_{15}	011101001010111111	1.367425	53.917790
c_{16}	001011111010001000	0.558199	37.095265
c_{17}	110010110100100100	2.382257	37.077412
c_{18}	100110010101100000	1.797004	48.705701
c_{19}	011000001010000100	1.132374	51.549879
c_{20}	001010100110010001	0.496778	29.365759

Tablica 3.2: Populacja po 1 iteracji algorytmu

Rozdział 4

Logika rozmyta

4.1 Wprowadzenie i uwagi

Impulsem dla powstania teorii zbiorów rozmytych była chęć precyzyjniejszego opisania zjawisk oraz pojęć mających ze swojej natury nieprecyzyjny lub wieloznaczny charakter. Za ojca tej dziedziny nauki uważa się L. A. Zadeha, który przedstawił jej zarys w pracy *Fuzzy Sets* (*Information And Control, 1965, vol. 8, p. 338-353*).

4.2 Trochę teorii

Definicja 4.2.1 *Zbiorem rozmytym A w pewnej przestrzeni X (X jest zbiorem niepustym i nierozmytym), co zapisujemy $A \subseteq X$ nazywamy zbiór*

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$$

gdzie

$$\mu_A : X \to [0, 1]$$

jest funkcją przynależności *zbioru rozmytego A. Funkcja ta każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowywuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A.*

Do zapisu zbiorów rozmytych stosuje się symbolikę, która może okazać się lekko myląca. Jeżeli X jest przestrzenią o skończonej liczbie elementów, to znaczy $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, to zbiór rozmyty $A \subseteq X$ symbolicznie zapisujemy w następującej postaci

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

gdzie zapis

$$\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

należy rozumieć jako

$$(x_i, (\mu_A(x_i))$$

Jeśli X jest przestrzenią o nieskończonej liczbie elementów, to zbiór rozmyty $A \subseteq X$ symbolicznie zapisujemy jako

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x}$$

Definicja 4.2.2 *Zbiór elementów przestrzeni X, dla których $\mu_A(X) > 0$ nazywamy* nośnikiem *zbioru rozmytego A i oznaczamy supp$A$.*

Definicja 4.2.3 Wysokością *zbioru rozmytego A nazywamy liczbę $h(A)$ zdefiniowaną jak poniżej*

$$h(A) = sup_{x \in A} \mu_A(x)$$

Definicja 4.2.4 *Zbiór rozmyty A nazywamy* normalnym *jeśli $h(A) = 1$. Zauważmy, że jeśli zbiór nie jest normalny to zawsze można znormalizować go za pomocą przekształcenia*

$$\mu_{A'}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}$$

Definicja 4.2.5 *Zbiór rozmyty nazywamy* pustym, *co zapisujemy $A = 0$ jeśli $\mu_A = 0$ dla każdego $x \in X$.*

Definicja 4.2.6 *Zbiór rozmyty A* zawiera *się w zbiorze rozmytym B, co zapisujemy $A \subset B$ jeśli*

$$\mu_A \leq \mu_B$$

dla każdego $x \in X$.

Definicja 4.2.7 *Zbiór rozmyty A jest równy zbiorowi rozmytemu B, co zapisujemy $A = B$ jeśli*

$$\mu_A = \mu_B$$

dla każdego $x \in X$.

Definicja 4.2.8 *α-przekrojem zbioru rozmytego $A \subseteq B$, co zapisujemy A_α, nazywamy ziór nierozmyty*

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

dla każdego α z przedziału $[0, 1]$

Definicja 4.2.9 *Zbiór rozmyty $A \subseteq X$ jest* wypukły *jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i $\lambda \in [0, 1]$ zachodzi*

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2] \geq \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_2) = min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

Definicja 4.2.10 *Zbiór rozmyty $A \subseteq X$ jest* wklęsły *jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i $\lambda \in [0, 1]$ zachodzi*

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2] \leq \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_2) = min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

Definicja 4.2.11 Przecięciem *zbiorów rozmytych $A, B \subseteq X$ jest zbiór rozmyty $A \cap B$ o funkcji przynależności*

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

dla każdego $x \in X$.

Definicja 4.2.12 Sumą *zbiorów rozmytych $A, B \subseteq X$ jest zbiór rozmyty $A \cup B$ o funkcji przynależności*

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

dla każdego $x \in X$.

Uwaga 4.2.1 *Zamiast definicji 4.2.11 i 4.2.12 można spotkać alternatywne definicję przecięcia i sumy zbiorów rozmytych. W ogólności prycecięcie zbiorów rozmytych można zdefiniować za pomocą tak zwanej* T-normy *natomiast sumę zbiorów rozmytych za pomocą tak zwanej* S-normy.

Twierdzenie 4.2.1 (Twierdzenie o dekompozycji) *Każdy zbiór rozmyty $A \subseteq X$ można przedstawić w postaci*

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$$

gdzie αA_α oznacza zbiór rozmyty, którego elementom przypisano następujące stopnie przynależności

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha & dla \quad x \in A_\alpha \\ 0 & dla \quad x \notin A_\alpha \end{cases}$$

Definicja 4.2.13 Dopełnieniem *zbioru rozmytego $A \subseteq X$ jest zbiór rozmyty $\widehat{A}$ o funkcji przynależności*

$$\mu_{\widehat{A}} = 1 - \mu_A(x)$$

dla każdego $x \in X$.

Definicja 4.2.14 Iloczynem kartezjańskim *zbiorów rozmytych $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$, oznaczanym $A \times B$, nazywamy*

$$\mu_{A \times B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

lub

$$\mu_{A \times B} = \mu_A(x)\mu_B(y)$$

dla każdego $x \in X$ i $y \in Y$.

Definicja 4.2.15 Liczbą rozmytą *nazywamy zbiór rozmyty A określony w zbiorze liczb rzeczywistych R, $A \subseteq R$ taki, że*

1. *A jest normalny,*
2. *A jest wypukły,*
3. *$\mu_A(x)$ jest przedziałami ciągła.*

Definicja 4.2.16 *Liczba rozmyta $A \subseteq R$ jest*

- *dodatnia, jeżeli $\mu_A(x) = 0$ dla wszystkich $x < 0$.*
- *ujemna, jeżeli $\mu_A(x) = 0$ dla wszystkich $x > 0$.*

Definicja 4.2.17 *Niech dane będą dwie liczby rozmyte $A_1, A_2 \subseteq R$. Określamy dla nich operacje*

- dodawania, *co zapisujemy $A_1 + A_2 = B$, gdzie funkcja przynależności zbioru B przyjmuje postać*

$$\mu_B(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 + x_2}} min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$$

- odejmowanie, *co zapisujemy $A_1 - A_2 = B$, gdzie funkcja przynależności zbioru B przyjmuje postać*

$$\mu_B(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 - x_2}} min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$$

- mnożeniem, *co zapisujemy $A_1 \cdot A_2 = B$, gdzie funkcja przynależności zbioru B przyjmuje postać*

$$\mu_B(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 \cdot x_2}} min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$$

- dzieleniem, *co zapisujemy* $A_1 : A_2 = B$, *gdzie funkcja przynależności zbioru* B *przyjmuje postać*

$$\mu_B(y) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \\ y = x_1 : x_2}} min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$$

Definicja 4.2.18 *Relacją rozmytą* R *między dwoma niepustymi zbiorami (nierozmytymi)* X *i* Y *nazywamy zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezjańskim* $X \times Y$.

Definicja 4.2.19 *Uogólnioną (rozmytą) regułą wnioskowania* modus ponens *określa następujący schemat wnioskowania*

```
Przesłanka     x jest A'
Implikacja     IF x jest A THEN y jest B
-------------------------------------
Wniosek        y jest B'
```

gdzie $A, A' \subseteq X$ *oraz* $B, B' \subseteq Y$ *są zbiorami rozmytymi, natomiast* x *i* y *są* zmiennymi lingwistycznymi *czyli zmiennymi przyjmującymi jako swoją wartość słowa lub zadania wypowiedziane w języku naturalnym.*

Definicja 4.2.20 *Uogólnioną (rozmytą) regułą wnioskowania* modus tollens *określa następujący schemat wnioskowania*

```
Przesłanka     y jest B'
Implikacja     IF x jest A THEN y jest B
-------------------------------------
Wniosek        x jest A'
```

gdzie $A, A' \subseteq X$ *oraz* $B, B' \subseteq Y$ *są zbiorami rozmytymi, natomiast* x *i* y *są* zmiennymi lingwistycznymi *czyli zmiennymi przyjmującymi jako swoją wartość słowa lub zadania wypowiedziane w języku naturalnym.*

Definicja 4.2.21 *Niech* A *i* B *będą zbiorami rozmytymi,* $A \subseteq X$ *oraz* $B \subseteq Y$. *Rozmytą implikacją* $A \to B$ *nazywamy relację* R *określoną w* $X \times Y$ *i zdefiniowaną za pomocą jednej z podanych reguł*[1]

reguła Mamdaniego (minimum)

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

reguła Larsena (iloczyn)

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$$

[1] Reguł tych jest znacznie więcej.

Bibliografia

[1] red. Maciej Nałęcz, *Biocybernetyka i inżynieria biomedyczna 2000*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2000.

[2] Józef Korbicz, A. Obuchowicz, D.Uciński, *Sztuczne sieci neuronowe*, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1994.

[3] John Hertz, Anders Korgh, Richard G. Palmer, *Wstęp do teorii obliczeń neuronowych*, WNT, Warszawa 1995.

[4] Maciej Piliński, Danuta Rutkowska, Leszek Rutkowski, *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.

[5] Stanisław Osowski, *Sieci neuronowe w ujęciu algorytmicznym*, WNT, Warszawa 1996.

[6] J. Żurada, M. Barski, W. Jędruch, *Sztuczne sieci neuronowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

[7] Marek Jan Kasperski, *Sztuczna inteligencja. Droga do myślących maszyn*, Helion, Gliwice, 2003